Espace

Produit scalaire

Définition

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs et soit α la mesure en radian de l'angle géométrique déterminé par deux représentants quelconques de même origine des vecteurs $\vec{u}$ et de $\vec{v}$.

On appelle produit scalaire de $\vec{u}$ par $\vec{v}$ et on note $\vec{u}\,.\,\vec{v}$ le réel défini par :

$\vec{u}\,.\,\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos\alpha$, si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls.

$\vec{u}\,.\,\vec{v} = 0$, si l'un des vecteurs $\vec{u}$ ou $\vec{v}$ est nul.

Expression analytique du produit scalaire dans une base orthonormée

Soit $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ une base orthonormé de l'espace. Pour tous vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$:

$\vec{u}\,.\,\vec{v} = xx' + yy' + zz'$ et $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Si A(x , y , z) et B(x' , y' , z') sont deux points de l'espace muni d'un repère orthonormée , alors $AB = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}$.

Produit vectoriel

Définition

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs et soit $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{OB} = \vec{v}$.

On appelle produit vectoriel de $\vec{u}$ par $\vec{v}$ et on note $\vec{u} \wedge \vec{v}$, le vecteur défini comme suit :

- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires alors $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$.
- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires alors : $\vec{u} \wedge \vec{v}$ orthogonal à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$; $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v})$ est une base directe et $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = OA \times OB \times \sin(\widehat{AOB})$.

Expression analytique du produit vectoriel de deux vecteurs dans une base orthonormée directe

© najah.com®

L'espace est muni de base orthonormée directe $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Pour tous vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$ de l'espace on a alors : $\vec{u} \wedge \vec{v} = (bc' - cb')\vec{i} + (ca' - ac')\vec{j} + (ab' - ba')\vec{k}$.

Distance d'un point à une droite

Soit D une droite de vecteur directeur $\vec{u}$ et A un point de D. La distance d'un point M de l'espace à la droite D est le réel $d(M, D) = \dfrac{\left\|\overrightarrow{MA} \wedge \vec{u}\right\|}{\left\|\vec{u}\right\|}$.

1. Aires et volumes

L'espace est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

- L'aire d'un parallélogramme ABCD est égale à $\left\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}\right\|$.
- L'aire d'un triangle ABD est égale à $\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}\right\|$.
- Le volume d'un parallélépipède ABCDEFGH est égal à : $\left|(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}).\overrightarrow{AE}\right| = \left|\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})\right|$.
- Le volume d'un tétraèdre ABCD est égal à : $\frac{1}{6}\left|(\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BD}).\overrightarrow{BA}\right| = \frac{1}{6}\left|\det(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BA})\right|$.

2. Distance d'un point à un plan

Soient P : $ax + by + cz + d = 0$ avec $(a, b, c) \neq (0,0,0)$ un plan de l'espace et $A(x_0, y_0, z_0)$ un point. La distance de A à P est : $d(A, P) = \dfrac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$.

Sphère

Définition

Soit I un point de E et R un réel strictement positif, on appelle sphère de centre I et de rayon R l'ensemble : S = {M ∈ E tel que IM = R}

Equation cartésienne d'une sphère dans un repère orthonormée

Soit I(a,b,c) un point et R > 0 .

l'ensemble des points M(x, y, z) tels que $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$ est la sphère de centre I et de rayon R. L'équation précédente est dite équation réduite de la sphère.

Toute sphère S admet une équation cartésienne de la forme $x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$, où a, b, c et d quatre réel.

© najah.com®